

## Lesson 9. 頻度と分布

## § C. ポアソン分布

---



---



---



---



---



---



---

## ポアソン分布

## Poisson Distribution

- 離散分布の一種
- 二分割または二値の事象、つまり考えられる結果がただ2つ
- $X$  = 時間的あるいは空間的区間での事象の数
- $\lambda$  = (成功)事象の平均または期待数

---



---



---



---



---



---



---

## ポアソン分布 (続き)

- 確率変数  $X$  の値、つまり事象が  $k$  回観察される確率、すなわちポアソン分布での確率密度  $P(k)$  は、

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

- $\lambda$  はその区間で無作為に事象が発生する平均数
- $e = 2.718\dots$  (自然対数; 定数)

---



---



---



---



---



---



---

### 事象率と事象の期待数

- あるまれな事象が起こる**率**が一定期間ごとに  $\mu$  であるとする。
- 調べたい期間の長さを  $t$  とする。
- 期間  $t$  でのその**事象の期待数**は、  

$$= \mu \times t$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### ポアソン分布の性質

- まれな事象の発生数の分布を表す。
- 時間や空間で無作為に分布する発生を表す。
- 分母のない計数(カウント)がある場合に有用である。
- 人年法での分析や相対危険度評価の際に重要である。

---

---

---

---

---

---

---

---

### ポアソン分布の根幹となる仮定

- 期間内で無作為に起こる事象の発生は独立している。
- ある区間内での1事象の1回の発生の確率はその区間の長さに逆比例する。
- 時間的あるいは空間的間隔(区間)の極く小さな分画では、その事象が1回以上発生する確率はほとんどゼロである。(小期間内では2回以上の発生を無視できる。)

---

---

---

---

---

---

---

---

### ポアソン分布の例

- ある大都市での自殺率が毎週 2 名であるとする。
- ある週で自殺が  $k$  名発生する確率は？
- 計算が便利のように次の再帰式を用いる。

$$P_{(k+1)} = \frac{\lambda}{k+1} P_{(k)}$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### ポアソン分布の例 (続き)

- 週に 0 名自殺する確率は

$$P_{(0)} = \frac{2^0}{0!} e^{-2} \approx 0.135$$

- 週に 1 名自殺する確率は

$$P_{(1)} = \frac{2}{0+1} P_{(0)} = 2 \times 0.135 = 0.270$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### ポアソン分布の例 (続き)

- 週に 2 名自殺する確率は

$$P_{(2)} = \frac{2}{1+1} P_{(1)} = 1 \times 0.270 = 0.270$$

- 週に 3 名自殺する確率は

$$P_{(3)} = \frac{2}{2+1} P_{(2)} = \frac{2}{3} \times 0.270 = 0.180$$

---

---

---

---

---

---

---

---

### ポアソン分布の例(続き)

- 同様に

$$P(4) = 2/4 \times P(3) = 0.090$$

$$P(5) = 2/5 \times P(4) = 0.036$$

$$P(6) = 2/6 \times P(5) = 0.012$$

$$P(7) = 2/7 \times P(6) = 0.003$$

$$P(8) = 2/8 \times P(7) = 0.001$$

$$P(9) = 2/9 \times P(8) = 0$$

---

---

---

---

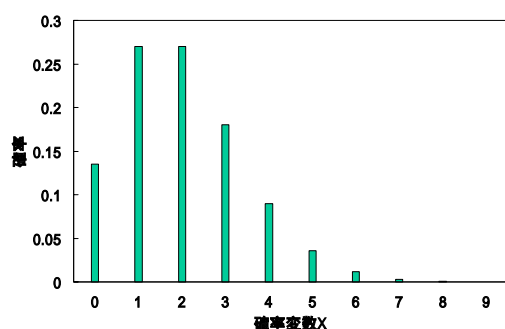
---

---

---

---

### ポアソン分布のグラフ例




---

---

---

---

---

---

---

---

### ポアソン分布の 二項分布への近似

- (二項分布における)  $n$  が大きく  $p$  が小さい時、事象の期待数は  $= np$  となる。
- この場合、ポアソン分布は二項分布の近似として使用できる。
- $n$  が大きければ大きいほど、より近似する。

---

---

---

---

---

---

---

---

## ポアソン分布の近似の例

- 40歳の母親からダウン症の乳児が生まれる確率を  $1/100$  とする。
- 40歳の母親から生まれた乳児25名のうち、ダウン症である相対度数はいくらか？

---



---



---



---



---



---



---

## ポアソン分布の近似の例(続き)

- $n$  は大きく、 $p$  は小さい。
- ダウン症の乳児の期待数は  

$$= np = 25(1/100) = 0.25$$
- ポアソン分布による近似には  $\lambda = 0.25$  を用いる。

---



---



---



---



---



---



---

## ポアソン分布の近似の例(続き)

$k$	ポアソン分布	二項分布
0	0.779	0.7778
1	0.195	0.1964
2	0.024	0.0238
> 2	0.002	0.0020

---



---



---



---



---



---



---